



(لصفاً پیش از شروع، صفحه اول پاسخنامه را با دقت مطالعه نمایید)

۱- یک عدد ۴ رقمی را تقسیمی گوئیم اگر رقم‌ها متفاوت بوده و بر عدد ۹۹ بخش پذیر باشد. چند عدد تقسیمی داریم؟ [۳ امتیاز]

۲- اعداد حقیقی و مثبت c, b, a مفروضند ثابت کنید. [۵ امتیاز]

$$\frac{(b+c-a)^2}{(b+c)^2+a^2} + \frac{(c+a-b)^2}{(c+a)^2+b^2} + \frac{(a+b-c)^2}{(a+b)^2+c^2} \geq \frac{3}{5}$$

۳- دو نیم خط By, Ax در نقطه‌های A و B بر نیم دایره به قطر AB مماس هستند. از نقطه دلخواه C بر نیم دایره مماس رسم می‌کنیم تا نیم خط By, Ax را به ترتیب در نقطه‌های E و D قطع کنند، محل تقاطع BD و AE را M و محل تقاطع CM و AB را H می‌نامیم ثابت کنید CH بر AB عمود است و M وسط CH است. [۴ امتیاز]

۴- نقطه O از خط d و d' به یک فاصله است، نقطه‌های S و T به ترتیب تصویرهای O بر خط d و d' می‌باشند اگر P نقطه‌ای بر d و Q نقطه‌ای بر d' باشد به طوری که داشته باشیم: $PQ = PS + QT$ ، ثابت کنید فاصله نقطه O از خطوط PQ و d برابر است. [۴ امتیاز]

۵- تعداد ثابتی از افراد ارثیه‌ای را بین خودشان تقسیم کرده‌اند. وارثی را فقیر می‌نامیم که کمتر از ۹۹ تومان دریافت کرده باشد و وارثی را غنی می‌نامیم که بیشتر از ۱۰۰۰۰ تومان گرفته باشد (ممکن است برخی از وارثان نه فقیر باشند نه غنی). کل ارثیه و تعداد وارثان به گونه‌ای است که صرف نظر از اینکه ارثیه چگونه تقسیم شود، کل آنچه سهم وارثان غنی است از کل آنچه سهم وارثان فقیر است کمتر نیست. ثابت کنید که مجموع سهم وارثان غنی است از ۱۰۰ برابر مجموع سهم وارثان فقیر، کمتر نیست. [۳ امتیاز]

۶- عددهای از ۱ تا ۱۰۰۰ را، به تصادف، روی محیط یک دایره قرارداده‌ایم. ثابت کنید می‌توان ۵۰۰ پاره خط غیرمتقاطع رسم کرد که هر یک از آنها دو تا از این عددها را به هم وصل می‌کند، به طوری که (قدرمطلق) تفاضل عددهای دو سر هر پاره خط از ۷۴۹ بیشتر نیست. [۴ امتیاز]

۷- در سالن مسابقات، ۱۵ دانش آموز کلاس اول و ۱۵ دانش آموز کلاس دوم در دو ردیف موازی صف کشیده‌اند، به طوری که ۱۵ تیم دو نفره تشکیل شده است. بر حسب تصادف، اختلاف قد دانش آموزان کلاس اول و دوم در هر تیم دو نفره از ۱۰ سانتی متر بیشتر نیست. ثابت کنید اگر دانش آموزان کلاس اول و دانش آموزان کلاس دوم در هر ردیف به ترتیب از بلندتر به کوتاه‌تر بایستند، در هر تیم دو نفره جدید باز هم اختلاف قد افراد حداکثر ۱۰ سانتی متر است. [۴ امتیاز]

۸- بزرگ‌ترین عدد طبیعی n را بیابید که بر همه‌ی اعداد طبیعی کوچک‌تر یا مساوی $\frac{n}{10}$ بخش پذیر باشد.

[۳ امتیاز]